

Zur Quantentheorie des Strahlungsgleichgewichts.

Von A. Einstein in Berlin und P. Ehrenfest in Leiden.

(Eingegangen am 16. Oktober 1923.)

In einer demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit über die Vereinbarkeit der Planckschen Strahlungsformel mit der Quantentheorie der Zerstreuung der Strahlung an frei bewegten Elektronen hat W. Pauli ein interessantes statistisches Gesetz für die Wahrscheinlichkeit aufgestellt, mit welcher die nach der Theorie von Compton und Debye möglichen Elementarakte der Quantenzerstreuung in einem (isotropen) Strahlungsfelde stattfinden. Es handelt sich hierbei um einen Elementarprozeß der Zerstreuung, bei welchem einerseits ein Quant aus einem Richtungsbereich $d\kappa$ und Frequenzbereich $d\nu$ in einen Richtungsbereich $d\kappa'$ und Frequenzbereich $d\nu'$, andererseits gleichzeitig ein Elektron aus einem dreidimensionalen Geschwindigkeits- (bzw. Impuls-) Bereich $d\omega$, in einen anderen, davon endlich verschiedenen Bereich $d\omega'$ durch Stoß übergeführt wird, derart, daß bei diesem Übergang Impuls- und Energiesatz gewahrt bleiben. Für die Wahrscheinlichkeit solcher „Übergänge bestimmter Art“ hat Pauli hypothetisch das Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$dW = (A\rho + B\rho\rho') dt \quad (1)$$

angegeben. Hierbei bedeutet ρ die zu ν , ρ' die zu ν' gehörige Strahlungsdichte, während A und B von der Wahl der Elementarbereiche abhängige, von $\rho(\nu)$ aber unabhängige Größen bedeuten. Pauli zeigt, daß bei Gültigkeit eines statistischen Gesetzes von dieser Form ein Elektronengas mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung mit einem Planckschen Strahlungsfelde von gleicher Temperatur in statistischem Gleichgewichte verharrt.

Was an dieser Gleichung paradox anmutet, ist das zweite Glied der Klammer, demzufolge die Anzahl der an einem (etwa quasi ruhenden) Elektron pro Zeiteinheit stattfindenden Elementarakte der Zerstreuung rascher als proportional der Strahlungsdichte wächst, und abhängig ist von der Strahlungsdichte ρ' derjenigen Frequenz ν' , welche das durch den Elementarakt modifizierte Quant aufweist. Aber Pauli zeigte, daß bei Weglassen dieses Gliedes die Wiensche statt der Planckschen Strahlungsformel bei thermischem Gleichgewicht gelten müßte, und erblickt in diesem Gliede den quantentheoretischen Ausdruck für diejenigen Eigenschaften der Strahlung, welche in der Undulationstheorie als Interferenzschwankungen erscheinen.

Der eine von uns hat in einer früheren Arbeit¹⁾ statistische Elementargesetze für die Aufnahme und Abgabe von Strahlung durch ein Bohrsches Atom angegeben, aus welchen die Plancksche Strahlungsformel folgt. Wir stellen uns nun die Aufgabe, jene früher aufgestellten Elementargesetze mit der Formel (1) in Verbindung zu bringen, in solcher Weise, daß die Grundlagen beider theoretischen Betrachtungen aus einem einheitlichen und allgemeineren Gesichtspunkt abgeleitet werden. In der Tat zeigt sich, daß auf diese Weise eine gewisse Vertiefung unserer Auffassung über die Wechselwirkung zwischen Strahlung und materiellen Teilchen gewonnen werden kann. Bei der Darstellung wollen wir im folgenden von den ursprünglichen Elementargesetzen ausgehen und diese schrittweise verallgemeinern.

§ 1. Die ursprünglichen statistischen Hypothesen und ihre Beziehung zur Planckschen Strahlungsformel²⁾. Es werde ein Molekül oder Atom betrachtet, das gewisser Quantenzustände Z fähig sei. Z und Z^* seien zwei derartige Zustände mit der Energie ϵ bzw. ϵ^* ($\epsilon^* > \epsilon$), welche durch Aufnahme bzw. Abgabe eines Quants $\epsilon^* - \epsilon = h\nu$ ineinander übergehen können. Es befinde sich in einem isotropen Strahlungsfelde, dessen Strahlungsdichte ρ eine vorläufig beliebige Funktion von ν sei. Es sollen für die Übergänge zwischen den Zuständen Z und Z^* die folgenden Wahrscheinlichkeitsgesetze maßgebend sein: 1. Für den Übergang eines im Zustande Z befindlichen Moleküls nach Z^* unter Aufnahme eines Quants $h\nu$ (positive Einstrahlung)

$$dW = b\rho dt. \quad (2)$$

2. Für den Übergang eines im Zustande Z^* befindlichen Moleküls nach Z unter Abgabe eines Quants $h\nu$ unter der Einwirkung des Strahlungsfeldes (negative Einstrahlung)

$$dW = b\rho dt. \quad (3)$$

3. Für den Übergang eines im Zustande Z^* befindlichen Moleküls nach Z unter Abgabe eines Quants $h\nu$ ohne die Einwirkung des Strahlungsfeldes (spontane Ausstrahlung)

$$dW = a dt. \quad (4)$$

Die gesamte Wahrscheinlichkeit für einen Übergang $Z^* \rightarrow Z$ eines in Z' befindlichen Moleküls ist also

$$dW = (a + b\rho) dt. \quad (5)$$

¹⁾ A. Einstein, Phys. ZS. 18, 121—128, 1917.

²⁾ Dieser Paragraph enthält nichts Neues gegenüber der zitierten früheren Abhandlung.

Die Gewichte bzw. Wahrscheinlichkeiten der Quantenzustände Z sind hierbei alle als gleich ($= 1$) angenommen. Wir nehmen an, daß sich Quantenzustände von höherem Gewicht stets als Inbegriff mehrerer diskret verschiedener Quantenzustände von gleicher Energie auffassen lassen.

Sind viele solcher Moleküle in der Strahlung vorhanden, so gilt zwischen der Zahl n der Moleküle im Zustande Z und der Zahl n^* der Moleküle im Zustande Z^* die Boltzmannsche Beziehung

$$\frac{n^*}{n} = e^{-\frac{\epsilon^* - \epsilon}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (6)$$

Damit sich an dieser Verteilung durch Strahlungsaustausch der ins Auge gefaßten Art nichts ändere, muß gemäß (2) und (5) die Bedingung erfüllt sein

$$nb\rho = n^*(a + b\rho). \quad (7)$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\rho = \frac{a}{\frac{b}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} - 1}, \quad (8)$$

also die Plancksche Strahlungsformel, sofern die Koeffizienten a und b nur stets die Relation

$$\frac{a}{b} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (9)$$

erfüllen.

§ 2. Ausdehnung dieser Betrachtung auf den Fall, daß die Moleküle frei beweglich sind. Zunächst eine Bemerkung, welche für das Verständnis des Folgenden nützlich ist, und welche sich auch bei Pauli findet. Es ist für die Ableitung des § 1 nicht wesentlich, daß das Molekül nur diskreter Zustände bzw. Energiewerte fähig sei. Ist nämlich die Zustandsdichte eine kontinuierliche Funktion im Phasenraume, so ersetzen wir die Zustände Z, Z^* durch unendlich kleine Zustandsgebiete von gleicher Wahrscheinlichkeit a priori, zwischen denen ein Strahlungsübergang unter Wahrung der Beziehung $\epsilon^* - \epsilon = h\nu$ möglich ist. Dann mögen Gleichungen von der nämlichen Form gelten wie die Gleichungen (2), (3), (4). Da auch die Gleichung (6) gilt, ändert sich nichts Wesentliches an unserer Betrachtung.

Wenn ferner das betrachtete Molekül mit Bezug auf die Strahlungseinwirkung anisotrop ist, so wird der ins Auge gefaßte Elementarprozeß bzw. dessen Wahrscheinlichkeit auch von der Orientierung des Moleküls und von der Richtung und Polarisation des Strahlenbündels

abhängen, welches mit dem Molekül bei dem betrachteten Elementarprozeß in Wechselwirkung tritt. Für die nach diesen Gesichtspunkten spezialisierten Elementarprozesse und deren „Inverse“ werden wieder die Betrachtungen des § 1 gelten. Dabei ist jedoch ein Umstand zu beachten, auf den wir bisher keine Rücksicht zu nehmen brauchten, den wir jetzt ins Auge fassen müssen.

Wir dürfen den Übergang $Z^* \rightarrow Z$ nicht einfach als die zeitliche Umkehrung des Vorganges $Z \rightarrow Z^*$ betrachten. Nicht nur müßte in diesem Fall der letztere Vorgang das Quant in der entgegengesetzten Richtung entsenden, als es bei dem ersteren Vorgang aufgenommen wurde, so daß beide Vorgänge einander bezüglich ihres Einflusses auf das statistische Gleichgewicht nicht ausgleichen würden, sondern in gewissen Fällen, z. B. beim Vorhandensein eines konstanten Magnetfeldes und eines Wasserstoffatoms im Sinne der Bohrschen Theorie existieren die inversen Bewegungsvorgänge zu Z und Z^* überhaupt nicht. Wir müssen vielmehr für unsere Betrachtung annehmen, daß zu jedem Übergange $Z \rightarrow Z^*$ ein Übergang $Z^* \rightarrow Z$ existiere, derart, daß bei dem ersteren Prozeß ein Quant von derselben Richtung und überhaupt derselben Art absorbiert wird, wie es bei dem letzteren emittiert wird. Für die so definierten Übergänge sollen die in § 1 angegebenen statistischen Gesetze gelten.

Nun gehen wir zu dem Fall über, daß die Moleküle beweglich sind und unter dem Einfluß des Strahlungsprozesses ihre Geschwindigkeit ändern. In diesem Falle ist der Zustand des Moleküls durch die Geschwindigkeitskomponenten seines Schwerpunkts mitbestimmt, bzw. die Zustandsgebiete Z und Z^* durch Elementarintervalle dieser Geschwindigkeitskomponenten. ε und ε^* bedeuten dann die Werte der Gesamtenergie inklusive kinetischer Energie. Die Elementarprozesse bestimmter Art betreffen dann stets nur Wechselwirkung mit Strahlung eines bestimmten Richtungskegels. Die Konstanten a und b hängen auch hier natürlich von der Wahl des betrachteten Elementarprozesses ab. Ist die Beziehung (9) für alle Elementarprozesse bestimmter Art gewahrt, so ist das Temperaturgleichgewicht stets gewährleistet, wie auch a von der besonderen Wahl des Elementarprozesses abhängen mag.

§ 3. Ausdehnung der statistischen Elementargesetze auf den Fall, daß bei dem Elementarprozeß mehrere Strahlungsquanten beteiligt sind. Für den Elementarprozeß der Zerstreuung ist charakteristisch, daß an ihm zwei Strahlungsquanten beteiligt sind, ein einfallendes und ein zerstreutes, welche von verschiedener Richtung und im allgemeinen (bei beweglichen zerstreuen Molekülen, Atomen oder Elektronen) von verschiedener Frequenz sind. Um derartige

Prozesse zu umfassen und deren Beziehung zur Strahlungsformel zu übersehen, wollen wir das Schema des § 1 verallgemeinern. Bei dem betrachteten Elementarprozeß mögen die Strahlungsquanten $h\nu_1, h\nu_2, \dots$ vom Molekül aufgenommen und die Strahlungsquanten $h\nu'_1, h\nu'_2, \dots$, welche wie erstere zu Strahlungsbündeln von bestimmter, für jedes Quant besonderer Richtung gehören, vom Molekül abgegeben werden. Die zugehörigen Werte der Strahlungsdichte seien mit q_1, q_2, \dots bzw. q'_1, q'_2, \dots bezeichnet. Jedem derartigen Absorptions- bzw. Emissions-Teilprozeß des Elementarprozesses denken wir uns Koeffizienten $a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ bzw. $a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, \dots$ zugeordnet.

Die Formeln (2) und (5), naturgemäß verallgemeinernd, setzen wir für diesen Prozeß an

$$dW = \Pi b_1 q_1 \cdot \Pi (a'_1 + b'_1 q'_1) dt, \quad (10)$$

wobei die Produkte Π über die Indizes 1, 2, 3... zu erstrecken sind, und die Koeffizienten $a_1 b_1$ nicht nur von den ins Auge gefaßten besonderen Molekülzuständen gleicher Wahrscheinlichkeit a priori abhängen, zwischen denen der Elementarprozeß stattfindet, sondern auch von den Frequenz- und Richtungsbereichen, denen die einzelnen Strahlungsquanten angehören.

Die Wahrscheinlichkeit für den „inversen“ Prozeß ist dann durch die Formel

$$dW = \Pi (a_1 + b_1 q_1) \cdot \Pi b'_1 q'_1 dt \quad (11)$$

bestimmt. Hierbei ist

$$\varepsilon^* - \varepsilon = \sum h\nu_1 - \sum h\nu'_1, \quad (12)$$

und folglich bei thermodynamischem Gleichgewicht

$$\frac{n^*}{n} = e^{-\frac{\sum h\nu_1 - \sum h\nu'_1}{kT}}, \quad (13)$$

wobei n^* und n die Zahl der Moleküle bezeichnet, die sich im Zustand höherer bzw. tieferer Energie befinden. Als Bedingung des Strahlungsgleichgewichts ergibt sich hier nach (10) und (11)

$$n \cdot \Pi b_1 q_1 \Pi (a'_1 + b'_1 q'_1) = n^* \Pi (a_1 + b_1 q_1) \Pi b'_1 q'_1. \quad (14)$$

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung für die Plancksche Strahlungsformel erfüllt ist, falls nur zwischen zusammengehörigen a und b stets die Bedingung (9) erfüllt ist.

Setzt man

$$\frac{b_1 q_1}{a_1 + b_1 q_1} e^{-\frac{h\nu_1}{kT}} = f_1 \text{ usw.},$$

$$\frac{b'_1 q'_1}{a'_1 + b'_1 q'_1} e^{-\frac{h\nu'_1}{kT}} = f'_1 \text{ usw.},$$

so nimmt die Bedingung (14) die Form an

$$\frac{f_1 f_2 \dots}{f'_1 f'_2 \dots} = 1. \quad (14a)$$

Da aber bei Zugrundelegung der Planckschen Strahlungsformel mit Rücksicht auf (9) sämtliche Faktoren f gleich 1 sind, ist auch (14a) und damit (14) erfüllt. Das durch Verallgemeinerung entstandene Elementargesetz (10) ist also mit der Planckschen Strahlungsformel vereinbar.

Um aus (10) das Paulische Elementargesetz für die Zerstreung der Strahlung an Elektronen zu erhalten, hat man nur zu berücksichtigen, daß beide Produkte sich in diesem Falle auf einen einzigen Faktor reduzieren, so daß man erhält

$$dW = b \varrho (a + b \varrho'),$$

welche Formel, abgesehen von der Bezeichnungsweise, mit (1) übereinstimmt.

Über eine mögliche Deutung des kontinuierlichen β -Strahlenspektrums.

Von Lise Meitner in Berlin-Dahlem.

(Eingegangen am 16. Oktober 1923.)

Die Tatsache, daß eine und dieselbe β -strahlende Substanz β -Strahlgruppen sehr verschiedener Geschwindigkeit aussendet, hat eine weitgehende Erklärung dadurch gefunden, daß viele dieser Gruppen als Photoeffekt der γ -Strahlen gedeutet werden können. Die γ -Strahlen werfen in ihrem Entstehungsatom K , L , M usw. Elektronen heraus und die Austrittsenergie E_β dieser Elektronen ist mit der Frequenz ν_γ bzw. der Energie E_γ der γ -Strahlen durch die Gleichung verknüpft

$$h\nu_\gamma = E_\gamma = E_\beta + A, \quad (1)$$

wenn A die jeweilige Ablösungsarbeit bedeutet. Das Auftreten solcher sekundärer β -Strahlgruppen ist also zugleich ein Beweis für das Vorhandensein monochromatischer γ -Strahlgruppen. In welcher Weise diese γ -Strahlen mit den den Atomzerfall bedingenden primären β -Strahlen verknüpft sind, ist noch recht unklar.

Was die Frage der primären β -Strahlen selbst betrifft, so habe ich zu zeigen versucht, daß sie, ebenso wie die α -Strahlen, ursprünglich eine ganz bestimmte, für den Kern charakteristische Geschwindigkeit besitzen und habe eine gute Stütze dafür wieder in dem β -Strahlenspektrum des UX_1 erhalten¹⁾. Im Gegensatz hierzu ist von anderer Seite, vor allem von C. D. Ellis der Standpunkt vertreten worden²⁾, daß die emittierten Kernelektronen keine definierte Geschwindigkeit haben, sondern innerhalb gewisser Grenzen über einen kontinuierlichen Geschwindigkeitsbereich verteilt sind. Den Ausgangspunkt für diese Annahme bot die Tatsache, daß bei den β -strahlenden Substanzen außer dem Linienspektrum immer ein kontinuierlicher Untergrund vorhanden ist, der nach den Messungen von J. Chadwick³⁾ und J. Chadwick und C. D. Ellis³⁾ besonders im Gebiet der schnellen β -Strahlen von RaC so stark hervortritt, daß die Intensität der Linien daneben fast verschwindend klein ist.

In meinen früheren Arbeiten hatte ich schon mehrfach darauf hingewiesen, daß dieses kontinuierliche Spektrum auf sekundäre Ein-

¹⁾ L. Meitner, ZS. f. Phys. 17, 54, 1923.

²⁾ C. D. Ellis, ebenda 10, 203, 1922.

³⁾ J. Chadwick, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 16, 383, 1918; J. Chadwick und C. D. Ellis, Proc. Cambr. Phil. Soc. 26, 274, 1922.